УДК 532.5.031

В.В. Никонов

О ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЯХ

Согласно [1] течения, вектор скорости которых может быть представлен как градиент потенциала φ, т.е.

$$\overline{u} = \overline{\nabla}\varphi \tag{1}$$

и этот потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0 \tag{2}$$

называют потенциальными и также относят к течениям невязкой несжимаемой жидкости. Рассмотрим такие течения подробнее. Действительно уравнение (2) получается при подстановке (1) в уравнение неразрывности

$$\overline{\nabla} \cdot \overline{u} = 0 \tag{3}$$

таким образом, данное поле скорости будет удовлетворять закону сохранения массы.

С другой стороны известно [1], что движение невязкой несжимаемой жидкости описывается уравнениями Эйлера

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + (\overline{u} \cdot \overline{\nabla})\overline{u} = -\frac{1}{\rho}\overline{\nabla}p \tag{4}$$

которые получаются из уравнений Навье – Стокса

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + (\overline{u} \cdot \overline{\nabla})\overline{u} = -\frac{1}{\rho}\overline{\nabla}p + \nu\Delta\overline{u} \tag{5}$$

при стремлении коэффициента безразмерной кинематической вязкости к нулю $\nu \to 0$ или $Re=1/\nu \to \infty$, и уравнением неразрывности (3).

При подстановке вектора скорости (1) в уравнения Эйлера (4) видно, что они тождественно не удовлетворяются в общем случае. В книге [1] дается следующее пояснение, что если взять градиент от (2), то меняя местами операции дифференцирования мы получим

$$\overline{\nabla}(\Delta\varphi) = \Delta(\overline{\nabla}\varphi) = \Delta\overline{u} = \overline{0} \tag{6}$$

Таким образом [1]: «…для потенциальных течений член в уравнении Навье-Стокса (5), зависящий от вязкости, тождественно исчезает.» Однако при этом получается, что мы вместо уравнений Эйлера (4) решаем уравнение Лапласа для скорости (6). Попытаемся показать в каком случае уравнение Навье-Стокса (5) может быть заменено уравнением Лапласа (6).

Переписав уравнение (5) в виде

$$\Delta\overline{u} = \frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial t} + (\overline{u}\cdot\overline{\nabla})\overline{u} + \frac{1}{\rho}\overline{\nabla}p\right)$$

и устремляя безразмерную кинематическую вязкость к бесконечности $\nu \to \infty$ ($Re \to 0$), легко видеть, что мы получаем переход к уравнению (6). Следовательно, потенциальная теория (1)-(2) описывает движение несжимаемой бесконечно-вязкой жидкости ($Re \to 0$).

Данное утверждение хорошо подтверждается экспериментальными данными. В частности при обтекании кругового цилиндра при очень малых числах Рейнольдса линии тока потенциального течения и их экспериментальная визуализация практически совпадают. В то же время с ростом числа Рейнольдса возникают отрывные явления, которые сложно воспроизводятся в теории потенциальных течений. Формулы для распределения скорости между коаксиально вращающимися цилиндрами [1] были получены, как теперь становится ясно, для случая бесконечно-вязкой жидкости. Действительно, если бы жидкость была невязкой, то касательная скорость от стенки вращающегося цилиндра не передавалась бы покоящейся жидкости. Известно [2], что потенциальная теория завышает эффект Магнуса при обтекании набегающим потоком вращающегося цилиндра. Теперь понятно, почему с увеличением числа Рейнольдса данный эффект гораздо меньше предсказываемого потенциальной теорией. Проведенный анализ позволяет объяснить также проблему, возникающую в вихревых методах, при определении давления из интеграла Коши-Лагранжа или уравнений Эйлера. Известно, что в случае измельчения сетки решение для давления начинает плохо сходиться с экспериментом [3]. Это происходит потому, что в общем случае полученное потенциальное поле не удовлетворяет уравнениям Эйлера для невязкой жидкости, и подстановка в последнее полученного потенциального поля скорости приводит к тому, что давление начинает играть роль невязки решения.

Список использованных источников

1. Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя, пер. с нем. Г.А. Вольперта, под. ред. Лойцянского Л.Г., М.: Наука, 1974, 712 с.

2. Белоцерковский С.М., Котовский В.Н., Ништ М.И., Федоров Р.М., Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел. М.: Наука, 1988, 232 с.

3. Никонов В.В., Шахов В.Г., Исследование моделирования двумерного вихревого нестационарного течения в многосвязной области, ИВУЗ «Авиационная техника», Казань, 2002, № 1, с. 24-26.